

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория вероятностей
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составили:

А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент

С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.04.2023

## Аннотация

Излагаемая теория описывает модели случайных экспериментов. Такого рода эксперименты (в которых невозможно заранее точно предсказать результат) изучаются в физике, биологии, технике, финансовой стохастической математике и других дисциплинах. Для моделирования вводится понятие вероятностного пространства, предложенное А.Н.Колмогоровым на основе общей теории меры. В курсе рассматривается ряд классических примеров и показывается, как формальные обобщения отражают естественные свойства частот, наблюдаемых (в примерно одинаковых условиях) событий. Наряду с элементарными свойствами вероятности и не только в рамках конечного числа равновероятных исходов устанавливаются формула полной вероятности и формула Байеса. Большое внимание уделяется примерам, позволяющим развивать вероятностную интуицию, например, детально рассматривается схема Бернулли. При этом определяется независимость событий, а также систем событий.

Особую роль играет понятие случайной величины как “измеримой функции элементарных исходов”, а также понятие ее распределения. Вводятся основные виды дискретных и абсолютно непрерывных распределений такие, как равномерное, биномиальное, Пуассона, экспоненциальное, нормальное и другие. С помощью интеграла Лебега определяются важные числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание и дисперсия. Доказывается ряд важнейших предельных теорем, справедливых при определенных условиях для последовательностей (независимых) случайных величин. К ним относятся варианты закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Для этого устанавливается неравенство Чебышева, рассматриваются различные типы сходимости случайных величин, а также применяется аппарат характеристических функций (преобразований Фурье). Некоторые результаты даются и для моделей, описываемых случайными векторами.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по теории вероятностей для дальнейшего использования в других областях математики, естественнонаучных и гуманитарных дисциплинах;
- формирование математической культуры и исследовательских навыков;
- овладение методами анализа случайных явлений и процессов.

### Задачи дисциплины

- приобретение обучающимися теоретических знаний, связанных с аксиоматикой теории вероятностей и ее применениями;
- умение распознавать и выделять вероятностные закономерности;
- свободное владение основными понятиями (вероятностное пространство, случайная величина, независимость и т.д.), формулами (полной вероятности, Байеса и др.) и классическими схемами (Бернулли, полиномиальной и др.);
- знание основных теорем (законы больших чисел, центральная предельная теорема и др.) и границы их применимости;
- развитие теоретико-вероятностной интуиции, т.е. умения строить математические модели, правильно отражающие те или иные стороны случайных явлений.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки

УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
--	--

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- понятие вероятностного пространства;
- определения независимости событий и классов событий;
- определения случайной величины и связанных с ней числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсия, моменты);
- понятия независимости случайных величин, ковариации и коэффициента корреляции;
- определения и свойства функции распределения, плотности, производящей функции, характеристической функции;
- виды сходимости последовательностей случайных величин (почти наверное, по вероятности, в среднем квадратическом, по распределению) и соотношения между ними.

уметь:

- применять основные теоремы и формулы:
- формулу полной вероятности,
- формулу Байеса,
- теоремы сложения и умножения,
- предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа,
- законы больших чисел Бернулли, Чебышева и Хинчина,
- центральную предельную теорему.

владеть:

- основными приемами построения вероятностного пространства;
- комбинаторной техникой вычисления вероятности и приемами вычисления геометрических вероятностей;
- аналитическими методами теории вероятностей, связанными с применением производящих и характеристических функций;
- приближенными методами вычислений, основанными на применении предельных теорем.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вероятностное пространство и дискретная вероятностная модель.	4	4		12
2	Последовательности независимых испытаний.	4	4		12
3	Дискретные случайные величины.	6	6		14
4	Непрерывные случайные величины. Многомерные распределения.	10	10		23
5	Законы больших чисел и центральная предельная теорема.	6	6		14
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

##### 1. Вероятностное пространство и дискретная вероятностная модель.

Теоретико-множественная модель событий. Определение вероятности. Элементы комбинаторики. Геометрические вероятности. Алгебры множеств и разбиения. Простейшие свойства вероятности на конечной алгебре событий. Теорема сложения. Условная вероятность. Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Определения независимости событий и классов событий. Теорема о независимости алгебр, порожденных разбиениями.

##### 2. Последовательности независимых испытаний.

Схема Бернулли. Вероятностное пространство, описывающее схему Бернулли, и биномиальное распределение. Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа. Полиномиальная схема и полиномиальное распределение.

##### 3. Дискретные случайные величины.

Индикаторы событий и их свойства. Законы распределения дискретных случайных величин. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Целочисленные случайные величины и производящие функции.

##### 4. Непрерывные случайные величины. Многомерные распределения.

Общее определение случайной величины, функция распределения и плотность. Вычисление математического ожидания и дисперсии. Совместное распределение и независимость случайных величин. Мультипликативное свойство математического ожидания. Ковариация и коэффициент корреляции, ковариационная матрица. Многомерное нормальное распределение.

##### 5. Законы больших чисел и центральная предельная теорема.

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли и форме Чебышева. Определение и свойства характеристических функций. Характеристические функции некоторых распределений. Формула обращения и теорема сходимости. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Центральная предельная теорема. Закон больших чисел в форме Хинчина.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Сборник задач по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособ для вузов / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков .— 2-е изд. испр. и доп. — М. : Наука, 1989 .— 319 с.

Ширяев, А. Н.

Вероятность [Текст]. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев

Севастьянов, Б. А.

Курс теории вероятностей и математической статистики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Севастьянов .— М. ; Ижевск

Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.

Теория вероятностей.— М.: Наука, 1983.— 160 с.

Чистяков, В. П.

Курс теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. П. Чистяков .— 7-е изд., испр. — М : Дрофа, 2007 .— 253 с. — (Высшее образование). - Библиогр.: с. 248. - Предм. указ.: с. 249-250. - 5000 экз. - ISBN 978-5-358-03022-0 (в пер.) .

#### Дополнительная литература

1. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Ю. А. Розанов .— 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1989 .— 312 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.math.mipt.ru>

<http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.

<http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.

<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».

<http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

<http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчики:**

А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент  
С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

- понятие вероятностного пространства;
- определения независимости событий и классов событий;
- определения случайной величины и связанных с ней числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсия, моменты);
- понятия независимости случайных величин, ковариации и коэффициента корреляции;
- определения и свойства функции распределения, плотности, производящей функции, характеристической функции;
- виды сходимости последовательностей случайных величин (почти наверное, по вероятности, в среднем квадратическом, по распределению) и соотношения между ними.

### уметь:

- применять основные теоремы и формулы:
- формулу полной вероятности,
- формулу Байеса,
- теоремы сложения и умножения,
- предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа,
- законы больших чисел Бернулли, Чебышева и Хинчина,
- центральную предельную теорему.

### владеть:

- основными приемами построения вероятностного пространства;
- комбинаторной техникой вычисления вероятности и приемами вычисления геометрических вероятностей;
- аналитическими методами теории вероятностей, связанными с применением производящих и характеристических функций;
- приближенными методами вычислений, основанными на применении предельных теорем.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Перечень контрольных вопросов для дифференцированного зачета:

1. Найти наиболее вероятное число выпадений в сумме 4-х очков при 83 бросаниях двух игральных костей.
2. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами. Первый завод выпускает половину всей продукции, второй треть и третий остальную часть. Вероятность того, что прибор, выпущенный первым заводом, проработает безотказно более трех лет равна 0,7. Для второго завода эта вероятность равна 0,6, а для третьего 0,5. Какова вероятность того что взятый наудачу прибор проработает более трех лет?
3. В группе из 30 студентов 10 отличников, 15 хороших студентов и 5 слабых. Отличник при тестировании с вероятностью 0,7 получает «отлично», с вероятностью 0,2 – «хорошо» и с вероятностью 0,1 – «удовлетворительно». Хороший студент получает эти же оценки с вероятностями 0,5; 0,3 и 0,2, соответственно. Слабый студент получает оценки «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» с вероятностями 0,3; 0,5 и 0,2, соответственно. При аттестации вуза из группы выбирается для тестирования студент случайным образом. Какова вероятность того, что в тестировании принимал участие отличник, если была получена оценка «хорошо»?
4. Пять студентов независимо друг от друга купили билеты на поезд, в котором семь вагонов. Какова вероятность того, что все они попадут в разные вагоны?
5. Два клиента должны позвонить в управляющую компанию с 9 до 12 часов, независимо друг от друга. Одному из них потребуется для разговора 10 минут, а второму – 15. Найти вероятность того, что ни один из них не позвонит во время разговора другого.
6. В коробке 5 белых, 10 черных и 5 красных шаров. Трое по очереди извлекают шары до тех пор, пока у одного из них не появится белый шар. Этот игрок считается победителем. Какова вероятность выигрыша второго игрока, если после каждой попытки шар возвращается в коробку?
7. В чулане находится  $n$  пар ботинок. Из них случайно выбирают  $2r$  ботинок ( $2r < n$ ). Какова вероятность, что среди выбранных ботинок: а) отсутствуют парные; б) имеется ровно одна комплектная пара; в) имеется ровно две комплектные пары?

#### **Критерии оценивания**

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые полсе указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;



оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости сдачи заданий и контрольных вопросов, предусмотренных программой дисциплины, с учетом набранных очков по БРС. При наборе количества очков БРС не меньше порогового студенту ставится дифференцированный зачет.

При проведении устного опроса обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося на устном опросе не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения устного опроса обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.